CENNI SULLE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO ARITMETICO DI PASCAL PER M. R...

274. 29

CENNI SULLE PROPRIETA

DEL

TRIANGOLO ARITMETICO DI PASCAL

CON UNA TRADUZIONE

DEL TRATTATO DELLO STESSO AUTORE

DE NUMERIS MULTIPLICIBUS EX SOLA CHARACTERUM NUMERICORUM ADDITIONE AGNOSCENDIS

CON ANNOTAZIONI

PER

M. R.

LUOGOTENENTE NEL R. CORPO DI STATO MAGGIORE

PISA

TIPOGRAFIA NISTRI

1866

PROPRIETA
DEL TRIANGOLO ARITMETICO DI PASCAL

Se nella formola generale che dà il numero delle combinazioni di m oggetti p a p

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots\ldots p}$$

si pone successivamente $p=1$, $p=2$, $p=3$ ec. sino a $p=20$, si avranno le seguenti formole

$$C_m^1 = m\,,\quad C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,,\quad C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$C_m^{20} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-19)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots 20}$$

Facendo ora variare m successivamente da 1 a 20 in ognuna di queste formole si otterranno le seguenti serie di numeri

per C_m^1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

per C_m^2 1 3 6 10 15 21 28 36 45

per C_m^3 1 4 10 20 35 56 84

per C_m^4 1 5 15 35 70

per C_m^{19} 1 20

finalmente

per C_m^{20} 1

Per avere il valore del simbolo C^{0}_{m} che non si potrebbe ricavare dalla formola generale precitata, richiameremo alla mente il seguente lemma:

Supponendo di già formata una potenza di un binomio e che si avesse bisogno della potenza seguente del medesimo, si potrebbe ottenere subito i coefficienti del secondo sviluppo senza più calcolarli direttamente ed evitando ogni specie di moltiplicazione, osservando che ogni coefficiente nello sviluppo $(x+a)^{m+1}$ non è altro che la somma del coefficiente del termine di medesimo rango nello sviluppo $(x+a)^{m}$ e di quello che precede quest'ultimo.

Traducendo questa osservazione in eguaglianza, si avrà:

$$C^{p}_{m+1} = C^{p}_{m} + C^{p-1}_{m}$$

Ora facciamo in quest'ultima formola $p=1$, viene

$$C^{1}_{m+1} = C^{1}_{m} + C^{0}_{m}$$

Ma siccome $C^{1}_{m+1} = m+1$ e $C^{1}_{m} = m$, si avrà ancora:

$$m+1 = m + C^{0}_{m} \quad \text{onde} \quad C^{0}_{m} = 1$$

Rimanendo ferme le sovraccennate condizioni di variazione per m, p variando ora da 0 a 20, avremo da considerare in più la serie C^{0}_{m}, ossia

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Disponendo queste varie serie come nella tavola annessa, si viene a formare una tavola numerica a foggia di triangolo rettangolo, alla quale Pascal diede il nome di *Triangolo aritmetico*. Queste serie di numeri si trovano, come si vede nelle colonne orizzontali della Tavola e la legge di formazione dei loro singoli termini è semplicissima: la seconda serie deducendosi dalla prima per mezzo dell'addizione dei due primi, dei tre primi, dei quattro ..... ec. primi termini della prima; la terza deducendosi dalla seconda nel medesimo modo che la seconda si è dedotta dalla prima, e così di seguito.

« Chiamo, dice Pascal, *numeri del primo ordine* le semplici unità

1 , 1 , 1 , 1 , 1 , ec.

« Chiamo *numeri del second' ordine*, i naturali che formansi per mezzo del-
« l'addizione delle unità

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ec

« Chiamo *numeri del terz ordine*, quelli che formansi per mezzo dell'addi-
« zione dei naturali, e che sogliansi chiamare *triangolari*

1 , 3 , 6 , 10 , ec

« vale a dire che il secondo triangolare, cioè 3 è *eguale* alla somma dei due
« primi numeri naturali, che sono 1 e 2; come pure il terzo triangolare 6 è
« eguale alla somma dei tre primi numeri naturali 1 , 2 , 3 ; ec

« Chiamo *numeri del quart'ordine*, quelli che formansi per mezzo dell'addi-
« zione dei triangolari e che sogliansi chiamare *piramidali*

1 , 4 , 10 , 20 , ec

« Chiamo *numeri del quint'ordine*, quelli che formansi per mezzo dell'addi-
« zione dei precedenti, ai quali non fu dato verun nome e che si potrebbero
« chiamare *triangolo-triangolari*

1 , 5 , 15 , 35 , ec

« Chiamo *numeri del sest ordine*, quelli che formansi per mezzo dell'addi-
« zione dei precedenti.

1 , 6 , 21 , 56 , 126 , 252 , ec

« E così all'infinito

1 , 7 , 28 , 84 , ec
1 , 8 , 36 , 120 , ec. »

Si vedrà in appresso a quali proprietà tutti questi numeri devono la denominazione di *numeri figurati* data loro dai moderni matematici.

Se si considerano invece le colonne verticali del triangolo aritmetico si verifica che desse racchiudono tutti i coefficienti delle potenze successive da 1 a 20 dello sviluppo di Newton

Difatti tutti i numeri del primo ordine essendo compresi nella formola $C_m^0 = 1$

tutti i numeri naturali nella formola $C_m^1 = m$, tutti i triangolari nella formola

$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ tutti i piramidali nella formola $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ e

così di seguito, ecco subito giustificata la sovraccennata proprietà delle colonne verticali del triangolo, poichè

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3x^{m-3} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}a^px^{m-p} + \ldots + a^m$$

ossia

$$(x+a)^m = C_m^0x^m + C_m^1ax^{m-1} + C_m^2a^2x^{m-2} + C_m^3a^3x^{m-3} + \ldots + C_m^pa^px^{m-p} + \ldots + C_m^ma^m$$

Ora dall'ispezione stessa del triangolo aritmetico risulta che

1° Un termine qualunque di una data serie è sempre eguale alla somma di un numero di termini della serie antecedente precisamente eguale al rango del predetto, cosicchè 56 p. es. quinto numero piramidale è precisamente eguale alla somma dei cinque primi numeri triangolari, possiamo quindi porre

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-1} + \ldots + 1 \quad ,$$

2° Un termine qualunque di una data serie è sempre eguale a quello che lo precede sommato con tutti i termini dello stesso rango di quest'ultimo delle serie antecedenti, proprietà che Pascal enunciò dicendo che un *numero, di qualsiasi ordine, il quarto piramidale p. es. è eguale al terzo piramidale, più il terzo triangolare, più il terzo naturale, più il terzo delle unità* cioè più l'unità. Continuando ancora nello stesso esempio di 56, abbiamo di fatti

$$56 = 35 + 15 + 5 + 1 \; ;$$

possiamo quindi porre

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-2}^{p-1} + C_{m-3}^{p-2} + \ldots + 1 \; ;$$

3° *Un numero di qualsiasi ordine, è eguale a quello che lo precede nell'ordine stesso sommato col radicale di quest'ultimo* (*) *nell'ordine precedente; e per conseguenza il quarto p. es. dei numeri piramidali è eguale al terzo piramidale più il quarto triangolare, cosicchè il quinto triangolo-triangolare è eguale al quarto triangolo-triangolare, più il quinto piramidale* ec. — Questa proprietà è pure enunciata in questo modo dal Pascal

(*) Giova notare che Pascal chiama i valori di m della Tavola nostra *radici dei numeri*

Digitized by Google

Possiamo quindi porre questa altra formola con mezzo superiore delle precedenti

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1} \quad ,$$

4° La formola $C_m^p = C_m^{m-p}$ si può ancora verificare nelle colonne verticali del triangolo; esso poi non è che una delle conseguenze della legge che regola lo sviluppo di Newton. Si sa difatti che se questo sviluppo contiene un termine della forma $Mx^p a^{m-p}$ ne contiene pure un altro della forma $Mx^{p-1}a^{m-p}$, ossia $Ma^{m-p}x^p$, nel primo caso $M = C_m^p$ e nel secondo $M = C_m^{m-p}$, quindi

$$C_m^p = C_m^{m-p}$$

Sommando questa ultima eguaglianza colla precedente si viene ad avere

$$2C_m^p = C_m^{m-p} + C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$$

e quindi

$$C_m^p = \tfrac{1}{2}C_m^{m-p} + \tfrac{1}{2}C_{m-1}^p + \tfrac{1}{2}C_{m-1}^{p-1}$$

Si vede pure nelle colonne verticali del triangolo aritmetico che nello sviluppo di Newton i coefficienti dei termini ad eguale distanza dei due estremi sono eguali, e che il numero dei termini dello stesso sviluppo è $m+1$.

Finalmente sommando successivamente queste varie colonne si ottiene sempre una potenza di 2, da zero alla ventesima nella tavola annessa, quindi la somma dei coefficienti dello sviluppo di Newton è eguale a 2^m, ciò che resulta del resto dalla formola generale ponendovi $x=1$, $a=1$

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1\ 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2\ 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ 2\ 3\ 4} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\ 2\ 3\ldots p} + \ldots + 1$$

ossia

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1\ 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2\ 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ 2\ 3\ 4} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\ 2\ 3\ldots p} + \ldots + 1$$

5° *Nella progressione naturale che principia dall'unità (numeri naturali) un numero qualunque moltiplicato per quello che la segue immediatamente, produce il doppio del suo triangolare*

Il medesimo numero moltiplicato per il triangolare del numero che lo segue immediatamente produce il triplo del suo piramidale.

Il medesimo numero moltiplicato per il piramidale del numero che lo segue immediatamente produce il quadruplo del suo triangolo-triangolare, e così all'infinito, per un modo generale ed uniforme.

Quest'ultima proposizione è dovuta al celebre *Fermat* consigliere al Parlamento di Tolosa. I lettori potranno facilmente verificare queste varie proprietà sul Triangolo aritmetico, avvertendo però che *Fermat* intende per triangolare, piramidale ec. di un dato numero naturale qual numero della serie triangolare, piramidale ec. di medesimo rango del numero naturale in discorso, cosicchè il triangolare di 2 sarebbe 3, il piramidale di 2 sarebbe 4 ec.

Stabilite tutte queste varie proprietà denominando colla caratteristica $\sum$ la somma di un dato numero di termini di un ordine qualunque, si avrà

$$\sum 1 = C^1_m = m$$

$$\sum m = C^2_{m+1} = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$$

vale a dire la somma di m primi numeri naturali è eguale a $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ e siccome d'altra parte questa somma è anche eguale al m^{simo} numero triangolare, tutti i numeri triangolari saranno pure compresi nella formola $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$.

Così pure si avrà

$$\sum \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} = C^3_{m+2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\sum \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C^4_{m+3} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

. . . . . .

$$\sum \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} = C^p_{m+p} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+1)}$$

Da queste ultime formole si deduce con facilità le proprietà accennate nella proposizione precitata di *Fermat*.

Il triangolo aritmetico fornisce un mezzo speditivo di trovare la somma dei quadrati, la somma dei cubi dei m primi numeri naturali.

Somma de' quadrati. Il quadrato di un numero naturale qualunque è sempre eguale al numero triangolare di medesimo rango sommato col numero triangolare che precede quest'ultimo, vale a dire generalizzando

$$m^2 = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

Quindi

$$\sum m^2 = \sum \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \sum \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

Ora siccome

$$\sum \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad e \quad \sum \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

avremo

$$\sum m^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

formola di già conosciuta.

Somma de' cubi. Si deduce dall'ispezione stessa del triangolo aritmetico che il cubo di un numero naturale qualsiasi è eguale alla differenza dei quadrati del numero triangolare di medesimo rango e del numero triangolare che precede quest'ultimo, vale a dire

$$m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right)^2 - \left(\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\right)^2 \quad ,$$

quindi

$$\sum m^3 = \sum \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right)^2 - \sum \left(\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right)^2 = \frac{m^2}{4}(m+1)^2$$

altra formola egualmente conosciuta.

Formando ora la serie

$$1 \ , \ 4 \ , \ 9 \ , \ 16 \ , \ 25 \ , \ 36 \ , \ 49 \ , \ 64 \ , \ \text{ec.}$$

si osserva un'altra proprietà de' quadrati de' numeri, si è che la differenza di due quadrati consecutivi è sempre eguale ad un numero impari, ciò che risulta d'altra parte dall'identità

$$m^2 - (m-1)^2 = 2m - 1 \quad ,$$

dalla quale si deduce quest'altra eguaglianza:

$$\sum m^2 - \sum (m-1)^2 = \sum (2m-1) \quad ,$$

Ora siccome d'altra parte

$$\sum m^2 - \sum (m-1)^2 = m^2 \quad ,$$

avremo

$$m^2 = \sum (2m-1) \quad ,$$

ossia la somma degli n primi termini consecutivi della serie

$$1 \ , \ 3 \ , \ 5 \ , \ 7 \ , \ 9 \ , \ 11 \ , \ 13 \ , \ 15 \ \ldots \text{ ec}$$

è sempre eguale ad un quadrato perfetto.

Formando pure la serie dei cubi de' numeri intieri

$$1 \ , \ 8 \ , \ 27 \ , \ 64 \ , \ 125 \ , \ 216 \ \ldots \text{ ec}$$

si osserva ancora che la somma degli n primi cubi consecutivi è sempre eguale ad un quadrato perfetto, il qual quadrato è sempre quello di uno de' termini della serie triangolare, ciò che risultava di già dalla formola precedentemente trovata

$$\sum m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\right)^2$$

Si può anche adoperare il triangolo aritmetico di Pascal per sommare il numero di proietti sferici contenuti nei cumuli di varie forme. E qui necessario rendersi un conto esatto della denominazione di *numeri figurati* data ai numeri che costituiscono il medesimo.

Per fissare meglio le idee sopra questo argomento siano dati dei proietti sferici in numero sufficiente da poter formare coi medesimi a vece di unità successivamente la serie de' numeri di primo ordine, quella dei numeri naturali, quella dei numeri triangolari e così di seguito; egli è evidente che la prima serie rappresenterà de' proietti isolati, la seconda dei proietti schierati su di una linea con un numero di proietti uguale rispettivamente ai termini della terza serie si potrà formare dei triangoli equilateri collocando gli uni vicino agli altri in modo però che i proietti di una fila coprino esattamente il vano lasciato dai proietti della fila antecedente, nello stesso modo si potrà formare delle piramidi triangolari coi numeri piramidali, dei pentagoni regolari coi triangolo-triangolari che suolsi chiamare anche *pentagonali*, degli esagoni, degli ettagoni, degli ottogoni ... ec. regolari coi numeri di sesto, di settimo, di ottava ... ec. ordine, che suolsi anche chiamare numeri *esagonali*, *ettagonali*, *otto-*

generali ..... ne. Da queste considerazioni deriva la denominazione generale di *numeri figurati* data ai medesimi. — La sola applicazione pratica che se ne possa ricavare si è la valutazione del numero totale di proietti sferici contenuti nei cumuli che si vedono sia negli arsenali sia nei terrapieni dei bastioni. Questi cumuli hanno generalmente una delle forme seguenti

Tetraedri regolari o tronchi di tetraedro regolare,
Piramidi quadrangolari o tronchi di piramide quadrangolare
Tronchi di prisma triangolare ossia cumuli a base rettangolare

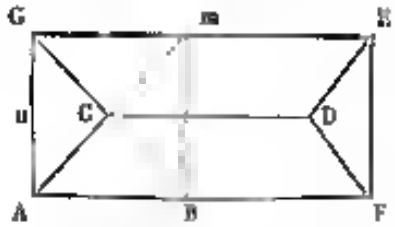
Se si trattasse p. es. di trovare la somma dei proietti contenuti in un cumulo tetraedrico regolare, basta osservare che se vi sono n di questi proietti in uno degli spigoli della base, la base stessa ne conterrà un numero eguale al n^{simo} numero triangolare, lo strato immediatamente superiore ne conterrà un numero eguale al $(n-1)^{simo}$ numero triangolare, e così di seguito sino all'unico proietto del vertice. Cosicchè il numero totale dei proietti contenuti nel cumulo sarà eguale a $\sum \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ ossia alla somma dei n primi numeri triangolari la quale somma è precisamente eguale al n^{simo} numero piramidale. Sicchè

$$\text{Somma totale dei proietti} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Per un tronco di tetraedro regolare basta osservare che il volume del tronco è eguale alla differenza fra i volumi di due tetraedri di cui si conoscono le basi.

Il secondo caso non offre più difficoltà del primo: egli è evidente che se uno degli spigoli della base contiene n proietti, la base stessa ne conterrà n^2, lo strato immediatamente superiore $(n-1)^2$ e così di seguito sino all'unico proietto del vertice, sicchè la somma totale dei proietti del cumulo sarà data dalla formola:

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$



Nel terzo caso siano m e n i numeri di proietti contenuti rispettivamente in ciascheduno degli spigoli della base AE del cumulo, m essendo $> n$; sia condotto pel punto C un piano parallelo alla faccia DEF; questo piano simmetrico al piano ACG intercetta rispettivamente sui lati AF e GE un numero di proietti eguale precisamente a n. Egli è

chiaro che il cumulo piramidale quadrangolare CBG ne conterrà un numero eguale a $\sum n^2$, ossia a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Inoltre al prisma CDBE vi saranno in esso tanti strati triangolari di proietti quanti proietti contenuti in EF ora ve ne sono $m-n$ ed il numero di proietti contenuti nello strato DFF è precisamente eguale al n^{esimo} numero triangolare ossia a $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Quindi

$$\text{somma totale dei proietti} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + (m-n)\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Semplificando viene

$$\sum = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Fra le numerose applicazioni del Triangolo aritmetico che trovansi nelle opere matematiche di Pascal sono da notarsi le seguenti quali più importanti

1° *Uso del Triangolo aritmetico per trovare le potenze dei binomi*

Il metodo proposto da Pascal si riduce ad una regola *pratica* per formare i coefficienti dei singoli termini degli sviluppi delle potenze di un binomio $A+1$ per mezzo delle colonne verticali del triangolo limitandosi a parecchi esempi numerici ed evitando di far uso delle notazioni algebriche — mosse senza dubbio dal suo *scetticismo* matematico — Pascal lasciava a Newton la gloria di scoprire una delle più importanti leggi dell'Algebra.

2° *Calcolo dei riparti da fare tra due giuocatori*, promesse certe condizioni di giuoco.

Risolvendo per mezzo del Triangolo aritmetico vari problemi relativi alle vincite ed alle perdite probabili dei due giuocatori, Pascal stabiliva le basi del *Calcolo delle Probabilità*.

3° *Determinazione dei centri di gravità, ricerca di varie quadrature e cubature*

Applicando le proprietà del Triangolo aritmetico alla risoluzione di questioni che trattansi oggi giorno ugualmente coll'aiuto del Calcolo Integrale, Pascal diede una prova di più della potenza del suo genio investigatore come pure della penetrazione della sua mente. I metodi ch'egli propone non sono però più da mettere in confronto coi semplici ed eleganti procedimenti moderni, per ciò resteranno solamente come un campo aperto alla curiosità dei lettori.

CARATTERI DI DIVISIBILITA DEI NUMERI

DEDOTTI

DALLA CONOSCENZA DELLA SOMMA DELLE LORO CIFRE

TRADUZIONE DEL TRATTATO DI PASCAL

DE NUMERIS MULTIPLICIBUS EX SOLA CHARACTERUM NUMERICORUM ADDITIONE AGNOSCENDIS,

CON ANNOTAZIONI

Questo trattato di Pascal è forse uno delle opere meno conosciute di quell'esimio matematico: vi si trova la teoria completa delle divisibilità dei numeri. Il lettore non potrà far a meno di ammirare la chiarezza, la concisione e nello stesso tempo l'eleganza delle dimostrazioni contenute nelle poche pagine che seguono.

Osservazione preliminare. Il carattere di divisibilità di un numero per 9 fondato sulla divisibilità della somma delle sue cifre, è molto frequentemente impiegato in Aritmetica. Mediante questo carattere si riconosce che 18 è un multiplo di 9 perchè la somma 1 + 8 delle sue cifre è eguale a 9; che 1719 è egualmente un multiplo di 9 perchè la somma 1 + 7 + 1 + 9 ossia 18 di tutte le sue cifre è dessa stessa divisibile per 9, e così di seguito. Benchè questa regola sia di un uso generale, credo che nessuno finora ne abbia data una

dimostrazione (*), ho cercato di estendere maggiormente il principio che n'è il punto di partenza. Giustificherò, in questo piccolo trattato, il carattere di divisibilità per 9 ed alcuni altri casi analoghi, vi esporrò anche un metodo generale che permette di riconoscere tutti i divisori di un dato numero, alla semplice ispezione della somma delle sue cifre e che si applichi non solo al nostro sistema decimale di numerazione (sistema di cui la base è di pura convenzione, contrariamente a ciò che si crede generalmente) ma a qualsiasi altro sistema di numerazione avente per base un numero scelto a caso.

Proposizione unica. — Riconoscere dall'ispezione sola della somma delle cifre di un dato numero, se questo numero è divisibile per un altro dato numero.

Per maggiore generalità rappresenteremo qui i numeri con delle lettere. Sia adunque A un divisore qualunque e T V N M un dividendo nel quale le lettere M, N, V, T rappresentino rispettivamente le cifre delle unità semplici, delle decine, delle centinaia, delle unità di mille e così di seguito, in tal guisa che per passare dalle quantità letterali alle quantità numeriche bastasse rimpiazzare ciascheduna lettera per una cifra, per esempio M per 4, N per 3, V per 5, T

(*) Questa dimostrazione semplicissima si trova in tutti i trattati d'Aritmetica, la riportiamo qui per maggior comodità dei lettori.

Si è verificato che l'unità seguita di un numero qualsiasi di zeri è sempre un multiplo di 9 più uno, vale a dire:

$$100000\ldots\ldots = \text{multiplo di } 9+1$$

Da ciò risulta immediatamente che:

$$M00000000\ldots\ldots = \text{multiplo di } 9+M$$

M essendo un numero qualunque.

Sia dato per esempio il numero 314781 avremo:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 80 &= \text{multiplo di } 9+8 \\ 700 &= \text{multiplo di } 9+7 \\ 4000 &= \text{multiplo di } 9+4 \\ 10000 &= \text{multiplo di } 9+1 \\ 300000 &= \text{multiplo di } 9+3 \\ \hline \text{Facendo la somma } 314781 &= \text{multiplo di } 9+1+8+7+4+1+3 \end{aligned}$$

Ora se la somma $1+8+7+4+1+3$ di tutte le cifre del numero proposto è divisibile per 9, il numero stesso lo sarà sicuramente; se questa somma non lo è, il resto della divisione della medesima per 9 darà precisamente il resto della divisione per 9 del numero proposto 314781.

per 6, ciò che darebbe per il dividendo 0534 il divisore A essendo un numero qualunque, mettiamo che sia 7. Tuttavia per il momento lasceremo da parte gli esempi particolari allo scopo di meglio racchiudere tutti i casi possibili in una stessa soluzione generale.

Essendo adunque dato il numero TVNM si tratta di riconoscere, alla sola ispezione della somma delle sue cifre, se è esattamente divisibile per il numero A.

Si scrivono sopra una sola linea, ed in ordine decrescente i numeri della serie naturale

10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1

Al di sotto dell'unità si pone l'unità.

Da questa presa *dieci volte* vale a dire dal numero 10, si sottrae il divisore A tante volte quanti è possibile e si scrive il residuo B sotto il numero 2.

Da B preso *dieci volte* si sottrae il medesimo divisore A tante volte quant'è possibile, e si scrive il residuo C sotto il numero 3.

Da 10 C si sottrae ancora il divisore A tante volte quanti è possibile e si scrive il nuovo residuo D sotto il numero 4.

E così di seguito.

Si forma in quel modo la tavola seguente

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
K	I	H	G	F	E	D	C	B	1

Prendendo ora una ad una da destra a sinistra le cifre che compongono il numero TVNM, le si moltiplica rispettivamente per i residui inscritti nella seconda linea della tavola precedente che si prendono anch'essi da destra a sinistra, si scrivono quindi i prodotti ottenuti gli uni sotto gli altri vale a dire

Il prodotto di M per l'unità cioè	M
Il prodotto di N per B, cioè	N × B
Il prodotto di V per C, cioè	V × C
Il prodotto di T per D, cioè	T × D

e così di seguito.

Ora perchè il numero proposto TVMN sia divisibile per A dico che bisogna e basta che la somma dei prodotti M N B V × C T × D ec. sia divisibile per A.

La cosa sarebbe evidente se il numero proposto non avesse che una cifra sola.

Sia adunque dato un numero di due cifre rappresentato da NM, perchè questo numero sia divisibile per A, dico che bisogna e basta che la somma $M+N\times B$ sia pure divisibile per A

Difatti la cifra N posta al rango delle decine, equivale a 10 N; ora

Dal calcolo stesso risulta che ..... $10-B$ è un multiplo di A,
Moltiplicando per N ..... $10N-B\times N$ sarà anche un multiplo di A
Se adunque accade che ..... $M+B\times N$ sia un multiplo di A
La somma delle due ultime
espressioni vale a dire ..... $10N+M$ sarà anch'esso un multiplo di A
Ma $10N+M$ è precisamente il numero proposto dunque ec.

Sia dato ancora un numero di tre cifre VNM, perchè esso sia divisibile per A dico che bisogna e basta che la somma $M+N\times B+V\times C$ sia divisibile per A

Difatti la cifra V, che trovasi al posto delle centinaia, equivale a 100 V, ora

Dal calcolo stesso risulta che ..... $10-B$ è un multiplo di A
Moltiplicando per 10 ..... $100-10B$ è anche un multiplo di A.
Moltiplicando ancora per V ..... $100V-10B\times V$ sarà pure un multiplo di A
Ma dal calcolo stesso risulta che ..... $10B-C$ è un multiplo di A
Moltiplicando per V ..... $10B\times V-C\times V$ sarà un multiplo di A,
E come si è stabilito tuttavia che $100V-10B\times V$ fosse un multiplo di A,
La somma delle due ultime
espressioni vale a dire ..... $100V-C\times V$ sarà dessa pure un multiplo di A
Se accade adunque che ..... $C\times V+N\times B+M$ sia un multiplo di A,
La somma delle due ultime
espressioni vale a dire ..... $100V+10N+M$ sarà ancora un multiplo di A
Ma $100V+10N+M$, non è altro che il numero proposto VNM dunque ec.

Se il numero avesse più di tre cifre la dimostrazione sarebbe analoga.

Esempi — Riconoscere se un dato numero è divisibile per 7

Sia proposto di riconoscere se il numero 287542179 è divisibile per 7.

I numeri naturali essendo disposti su di una stessa linea orizzontale, e nell'ordine decrescente da sinistra a destra, scrivo l'unità sotto l'unità

Dall'unità presa 10 volte, sottraggo 7 tante volte quante riescono, e pongo il residuo 3 sotto la cifra 2

Moltiplico il medesimo residuo per 10 e dal prodotto 30 sottraggo 7 tante volte quante riescono; pongo il nuovo residuo 2 sotto la cifra 3

Valori di w

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190
120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140
210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38860
120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	126970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756
	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
		1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	126970
			1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
				1	15	120	680	3060	11628	38860
					1	16	136	816	3876	15504
						1	17	153	969	4845
							1	18	171	1140
								1	19	190
									1	20
										1

Da 23 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 6 sotto 4.
Da 60 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 4 sotto 5.
Da 40 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 5 sotto 6.
Da 50 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 1 sotto 7.
Da 10 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 3 sotto 8.
Da 30 sottraggo 7 tante volte quante riescono e scrivo il residuo 2 sotto 9.

I residui già ottenuti, vale a dire 4, 3, 2, 0, 4, 5, si riprenderanno di ora innanzi indefinitamente nel medesimo ordine. Formerò quindi la tavola seguente

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Moltiplico ora le cifre del numero proposto, principiando da quella delle unità semplici, rispettivamente per i residui di medesimo rango presi principiando pure dalla destra, nella seconda linea della tavola precedente, scrivo i prodotti ottenuti gli uni sotto gli altri, vale a dire

Il prodotto di 8 per 1 unità cioè	8
Il prodotto di 7 per 3	21
Il prodotto di 1 per 2	2
Il prodotto di 8 per 6	48
Il prodotto di 4 per 4	16
Il prodotto di 5 per 5	25
Il prodotto di 7 per 1	7
Il prodotto di 8 per 3	24
Il prodotto di 8 per 2	4
e se faccio la somma	149

se 149 è divisibile per 7, il numero 287542178 sarà anch'esso divisibile per 7.
Il medesimo metodo può servire ancora per riconoscere se 149 è un multiplo di 7.

Si moltiplicherà 9 per 1 unità, ciò che da	9
Poi 4 per 3	3
Poi finalmente 1 per 2	2
e si farà la somma	14

se questa somma è divisibile per 7, 149 lo sarà ugualmente.

Finalmente e più per curiosità che per necessità, si potrà trattare ancora il numero 14 come si è trattato il numero 149.

Moltiplicare 4 per 1 unità, ciò che da	4
Poi 1 per 3	3
E fare la somma	7

Quest'ultima essendo evidentemente divisibile per 7, il numero 14 lo sarà egualmente per conseguenza 119 lo sarà pure, e quindi il numero proposto 287542178 sarà anch'esso un multiplo di 7 (*).

(*) Varii autori di Trattati di Aritmetica propongono, per riconoscere se un dato numero è divisibile per 7 e per 13, un metodo fondato sul principio seguente:

1000 è un multiplo di $7-1$, come pure un multiplo di $13-1$

quindi, 1000000 è un multiplo di $7-1000$, come pure un multiplo di $13-1000$

mai: 1000000 è un multiplo di $7-$multiplo di $7+1$, come pure un multiplo di $13-$multiplo di $13+1$

ossia ancora 1000000 è un multiplo di $7+1$, come pure un multiplo di $13+1$

quindi: 1000000000 è un multiplo di $7-1$, come pure un multiplo di $13-1$;

e così di seguito.

Da ciò risulta immediatamente che se si scompone un numero qualsiasi in partite di tre cifre principiando dalla destra, facendo poi la somma dei numeri componenti le partite di rango impari e sottraendo da questa somma quella dei numeri componenti le partite di rango pari, il residuo ottenuto sarà tale che sommato con un multiplo convenuto di 7 e di 13, riprodurrà il numero proposto; dividendo il medesimo residuo per 7 e per 13 si avrà quello della divisione del numero proposto per 7 e per 13.

Prendiamo ancora ad esempio il numero del testo di Pascal

287 542 178

Avremo:

$$178 = 178$$
$$542000 = \text{multiplo di } 7 - 542$$
$$287000000 = \text{multiplo di } 7 + 287$$

facendo la somma $287542178 = \text{multiplo di } 7 + 178 + 287 - 542$
$= \text{multiplo di } 7 - 77$
$= \text{multiplo di } 7$

Il numero 287542178 è dunque divisibile per 7, ciò che ci risultava a priori, poichè $178 + 287 - 542$ testo 77 è un multiplo di 7.

Si avrebbe nello stesso modo:

$$287542178 = \text{multiplo di } 13 - 77$$

Ora siccome $77 = 5 \times 13 + 12 = \text{multiplo di } 13 - 1$, avremo:

Riconoscere se un dato numero è divisibile per 6

Sia dato il numero 248742

I numeri naturali essendo scritti come sopra gli uni vicino agli altri nell'ordine decrescente, pongo l'unità sotto l'unità, sottraggo 6 da 10, e pongo il residuo 4 sotto 2, sottraggo poi 6 da 40 tante volte che possibile, e pongo il residuo 4 sotto 3, il residuo 4 si riproduce dunque indefinitamente. Formo quindi la tavola dei residui come sopra

4	3	2	1
4	4	4	1

Alla cifra delle unità del numero proposto aggiungo ora i prodotti di tutte le altre cifre ciascheduna per 4, e se la somma

$$2+4\times4+7\times4+8\times4+4\times4+2\times4\ ,$$

cioè 102, è divisibile per 6, il numero 248742 sarà anch'esso divisibile per 6

Riconoscere se un dato numero è divisibile per 3

Costruiscasi ancora la tavola dei residui successivi, come negli esempi precedenti

6	4	3	2	1
1	1	1	1	1

Si riconoscerà facilmente che il residuo 1 si ripete indefinitamente, da che risulta che un dato numero, 2451 per esempio, sarà divisibile per 3, se la somma $2+4+5+1$ delle sue cifre è dessa stessa divisibile per 3

Riconoscere se un dato numero è divisibile per 9

In questo caso pure il residuo 1 si ripete indefinitamente, dunque perchè un dato numero sia divisibile per 6, bisogna e basta che la somma delle sue cifre lo sia

---

287542178 = multiplo di 10 + 1

Difatti

```
287542178 | 10
 27       | 22110320
  15
   24
   112
     81
      27
      118
        1
```

Riconoscere se un dato numero è divisibile per 4

Ecco qui sotto la tavola dei residui successivi

4	3	2	1
0	0	2	1

Avendo posto il residuo 2 sotto il numero 2, lo si moltiplica per 10, ciò che da 20; sottraendo 4 da 20 tante volte quanti è possibile, resta 0, che si pone sotto 3, quindi il residuo 0 si riproduce indefinitamente. Dunque un dato numero sarà divisibile per 4 quando la somma fatta della cifra delle sue unità col doppio di quella delle sue decine sarà dessa stessa un moltiplo di 4.

Si troverà nello stesso modo che perchè un dato numero sia divisibile per 8, bisogna o basta che la somma fatta della cifra delle sue unità, del doppio di quella delle sue decine e del quadruplo di quella delle sue centinaia, sia un moltiplo di 8.

Prendiamo un ultimo esempio

Dato un numero qualsiasi riconoscere s'è divisibile per 16

La solita tavola dei residui è la seguente

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1

Avendo posto l'unità sotto l'unità, la si moltiplica per 10. Il divisore 16 non potendosi sottrarre da 10, si scrive quest'ultimo numero stesso sotto 2, lo si moltiplica poi per 10, ciò che da 100, e da questo prodotto si sottrae 16 tante volte quanti è possibile, resta 4, che si pone sotto 3. Il residuo seguente è 8 ed a partire da quest'ultimo si trova indefinitamente il residuo 0.

Dunque perchè un dato numero sia divisibile per 16, bisogna o basta che sommando tra di loro la cifra delle unità del numero proposto, 10 volte quella delle decine, quattro volte quella delle centinaie ed otto volte quella delle unità di mille, la somma ottenuta sia dessa stessa divisibile per 16 (*).

Finalmente si riconoscerà nello stesso modo che tutti i numeri pei quali —

(*) In questi casi di divisibilità per 4, 8, 16 il metodo che propone Pascal non è punto pratico e serve solamente di giustificazione alla regola generale sovrasposta, perchè si sa d'altra parte che perchè un numero sia divisibile per 4, per 8, per 16 bisogna o basta che il numero formato colle sue due, tre, quattro ultime cifre sia divisibile rispettivamente per 4, 8, 16.

il decuplo della cifra delle decine più tutte le altre cifre prese una volta per ciascheduna fosse uno somma divisibile per uno qualunque dei divisori e due cifre di 90, vale a dire per 45, 18, 30, 90, — saranno dessi stessi multipli di quel divisore.

Si potrebbe facilmente dare una maggior estensione a questi principii; però mi accontenterò di aver aperto la via e sparso un po di luce sovra una materia nuova ed assai poco conosciuta. I caratteri di divisibilità che ho fatto conoscere esigono per esser applicabili, che i numeri siano scritti nel nostro sistema ordinario di numerazione decimale; in un altro sistema, in quello per esempio di cui la base fosse 12 (il quale sarebbe senza dubbio di un uso comodissimo), bisognerebbe modificare le regole sovresposte. Il sistema duodecimale impiega, oltre ai nove primi caratteri, due figure nuove per indicare l'una il numero dieci, l'altra il numero undici; in questo sistema di numerazione non sarebbe più esatto il dire che un numero è un multiplo di 9 quando la somma delle due cifre è pure un multiplo di 9.

Ma però i criteri che ho fatto conoscere e la dimostrazione fondamentale che ho data, convengono ancora a codesto sistema di numerazione come pure a tutti gli altri.

Per trovare il carattere di divisibilità per 9 nel sistema duodecimale, si scrive, come lo si è fatto precedentemente, la serie de numeri naturali in ordine decrescente e principiando dalla destra, e si pone l'unità sotto l'unità. Da quest'ultima, presa *dodici* volte e non più dieci, si sottrae il divisore 9 e si scrive il residuo 3 sotto il numero 2. Si moltiplica quest'ultimo residuo per dodici e dal prodotto 36 (leggesi trentasei) si sottrae ancora 9 tante volte quant'è possibile; il residuo è 0, perchè 36 contiene esattamente quattro volte il numero 9; i residui seguenti saranno nulli. Si forma in quel modo la tavola seguente.

4	3	2	1
0	0	3	1

E se ne deduce che tutti i numeri scritti nel sistema duodecimale, per quali la somma della prima cifra di destra col triplo della seconda (non fa più d'uopo occuparsi delle altre cifre) fosse divisibile per 9, saranno dessi stessi dei multipli di 9.

Si riconoscerebbe pure che nel medesimo sistema di numerazione, tutti i numeri di cui la somma delle cifre è divisibile per 11, sono dessi stessi dei multipli di 11.

Nel sistema decimale nostro, perchè un numero fosse divisibile per 11

bisognerebbe che la somma delle sue cifre di rango impari addizionata colla somma delle sue cifre di rango pari prese ciascheduna dieci volte fosse un moltiplo di 11 (*)

(*) La dimostrazione di questa proposizione di Pascal si trova pure in tutti i trattati di Aritmetica: essa è fondata sovra un principio analogo a quello che servì di punto di partenza per istabilire i caratteri di divisibilità di un numero per nove. La daremo qui perchè i lettori non abbiano da cercarla altrove.

Le potenze pari od impari di 10 sono dei moltipli di 11 aumentati o diminuiti di 1: difatti, se si divide per 11 il numero formato coll'unità seguita di un numero indeterminato di zeri:

$$\begin{array}{l|l} 1000000000 & 11 \\ \cline{2-2} 100 & 0909090 \\ \quad 100 & \\ \quad\quad 100 & \\ \quad\quad\quad 10 & \end{array}$$

Si trova per cifre del quoziente alternativamente 0 e 9, e pei residui 10, 1, 10, 1, 10 ec., cioè 10 per 10, 1 per 100, 10 per 1000 ec., vale a dire 10 per una potenza impari di 10 e 1 per una potenza pari.

Dunque, ogni potenza pari di 10 è un moltiplo di 11 aumentato di un unità; ogni potenza impari di 10 è un moltiplo di 11 aumentato di 10 o diminuito di un unità.

Da ciò risulta evidentemente che

$$M0000 = \text{moltiplo di } 11 + M$$
$$M00000 = \text{moltiplo di } 11 + 10M$$

M essendo un numero qualsiasi.

Prendiamo ora un esempio numerico: 2714478 per esempio, avremo:

$$\begin{array}{rl} 8 = & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 8 \\ 70 = & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 70 \\ 400 = & \text{moltiplo di } 11 + 4 \\ 4000 = & \text{moltiplo di } 11 + 40 \\ 10000 = & \text{moltiplo di } 11 + 1 \\ 700000 = & \text{moltiplo di } 11 + 70 \\ 2000000 = & \text{moltiplo di } 11 + 2 \\ \hline \text{facendo la somma} \quad 2714478 = & \text{moltiplo di } 11 + (8 + 70 + 4 + 40 + 1 + 70 + 2) \end{array}$$

Quindi se la somma fra parentesi è divisibile per 11, il numero proposto sarà pure divisibile per 11: ora la somma predetta non è altro che quella delle cifre di rango impari del numero in questione e quella delle cifre di rango pari prese ciascheduna dieci volte: dunque perchè un dato numero sia divisibile per 11, bisogna e basta ..... ec.

Dividendo la somma fra parentesi per 11, il residuo della divisione sarebbe precisamente quello della divisione per 11 del numero 2714478.

La dimostrazione di queste due ultime proposizioni non offrirebbe punto difficoltà e si potrebbe aggiungerne ancora vari altri casi a tutti i precedenti. Se mi sono esteso alquanto sovra questi caratteri di divisibilità, la novità del soggetto è l'unica scusa ch'io possa allegare in mio favore; tuttavia per ora non spingerò più oltre le mie ricerche convinto d'altronde che più lunghe spiegazioni farebbero infallibilmente perdere pazienza ai miei lettori.

FINE

33 833648

20
LIA
55

Prezzo Ital. Lire 3.